Pavel Obdržálek, LA II

8) *Zadání:* Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice řádu n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

8) *Vypracování:* Danou matici si můžeme přepsat jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočet $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ potom bude vypadat:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

a přitom víme, že pro matici $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ platí, že $\det(N \otimes M) = |N|^m |M|^n$, tedy pro náš případ $|N|^2 \cdot 1$.

$|N| = (-1)^n (\lambda - n)\lambda^{(n-1)}$, $|N|^2 = (\lambda - n)^2 \lambda^{2(n-1)}$.

Kořeny polynomu potom vychází $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = n$.

Vlastní vektory potom najdeme jako báze jádra matice $A - \lambda_{\{1,2\}} I$.

Jelikož zredukovaná matice bude mít pro $\lambda_1 = 0$ tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

pak báze jádra budou

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zredukovaná matice bude mít pro $\lambda_2 = n$ tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

pak báze jádra budou

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$